AUTOVALORES. MATRICES 3X3

POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Junio, 2016

Si deseamos calcular los autovalores de una matrix de orden 3 (tres), se conoce que

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Por teorema, los autovalores se determinante mediante el determinante.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Aplicando esta igualdad a la matriz dada "M", obtenemos que;

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Al desarrollar el determinante, nos queda

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{22}\,\lambda - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{11}\,a_{33}\,\lambda + a_{11}\,\lambda^2 - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{21}\,\lambda +$$

$$a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} + a_{13}\,a_{31}\,\lambda - a_{22}\,a_{33}\,\lambda + a_{22}\,\lambda^2 + a_{23}\,a_{32}\,\lambda + a_{33}\,\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

Agrupando las λ, resulta

$$-\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\lambda^2 + (-a_{11}\,a_{22} - a_{11}\,a_{33} + a_{12}\,a_{21} + a_{13}\,a_{31} - a_{22}\,a_{33} + a_{23}\,a_{32})\,\lambda +$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} = 0$$

Tomando negativo como factor comun, tendremos;

$$\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\,\lambda^2 + (a_{11}\,a_{22} + a_{11}\,a_{33} - a_{12}\,a_{21} - a_{13}\,a_{31} + a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32})\,\lambda -$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} = 0$$

Considerando las partes sombreadas del resultado y comparando con la matriz original, nos resulta en

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Donde Tr se denomina a la traza de la matriz, conocida como la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$\sum_{i=1}^{3} |M_{ii}| = |M_{11}| + |M_{22}| + |M_{33}| = a_{11}\,a_{22} + a_{11}\,a_{33} - a_{12}\,a_{21} - a_{13}\,a_{31} + a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}$$

Donde $|M_{ii}|$ es el determinante de los menores de la diagonal principal. Por último,

$$\det(M) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

Se concluye que, el deteterminante resultante de calcular los autovalores de una matriz M_{3x3} definido por $\det(M - \lambda I) = 0$ resultara en un polinomio de tercer grado con variable lambda (λ) de la forma

$$\boxed{\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0}$$

Donde podemos definir las constantes A, B y C como sigue;

$$A = \mathrm{Tr}(M)$$

$$B = \sum_{i=1}^{3} |M_{ii}| = |M_{11}| + |M_{22}| + |M_{33}|$$

$$C = \det(M)$$

EJEMPLO.

Sea la matriz definida por A, halle el polinomio característico. **(Parcial Sept-Dic 2010. USB)**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ans: $\lambda^3 - 6\,\lambda^2 - 15\,\lambda - 8 = 0$

Realizado por: MSc. Miguel Guzmán.
En caso de errores, favor notificar a magt369@gmail.com